

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

A M S T E R D A M

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 246 (C 11)

Cursus Operations Research II

Hoofdstuk III

Lineaire Programmering

door

J. Kriens

januari 1960

1. Inleiding.

Men kan een probleem oplossen met behulp van lineaire programmering, wanneer het voldoende nauwkeurig beschreven kan worden door een wiskundig model met de volgende eigenschappen:

- a) er zijn één of meer functies die geminimaliseerd, respectievelijk gemaximaliseerd moeten worden,
- b) de variabelen, waarin men vrijheid van keuze heeft komen lineair voor in de te optimaliseren functie(s), moeten voldoen aan een aantal voorwaarden, waarin ze eveneens alleen in de eerste graad voorkomen, moeten positief of nul gekozen worden.

Het theoretisch onderzoek en de praktische toepassing van deze modellen dateren vanaf omstreeks 1941. Sindsdien is men er in geslaagd talrijke problemen te gieten in de vorm van lineaire programmeringsmodellen en heeft men verschillende oplossingsmethoden voor deze modellen uitgewerkt.

De meest bekende toepassingen liggen op de terreinen van

- 1) mengproblemen: het zo goedkoop mogelijk samenstellen van een mengsel (veevoeder, diëet, legering) dat aan bepaalde eisen moet voldoen uit verschillende grondstoffen waarvan de samenstelling en de kostprijs bekend is;
- 2) toewijzingsproblemen: het vaststellen op welke wijze beschikbare capaciteiten (machines, kapitaal, grond, arbeiders) verdeeld moeten worden over verschillende mogelijke productieprocessen, opdat de winst of een andere grootheid optimaal wordt;
- 3) transportproblemen: het vervoeren van een homogeen product (graan, olie, erts) vanuit een aantal opslagplaatsen naar een aantal bestemmingen, zodanig dat de transportkosten minimaal zijn.

Voor eenvoudige toepassingen van deze typen problemen verwijzen wij naar het tweede hoofdstuk van de elementaire cursus "Operations Research". In dit hoofdstuk zullen wij toepassingen op twee andere typen van problemen bespreken.

De eerste algemene oplossingsmethode is in 1947 gepubliceerd door G.B. DANTZIG en draagt de naam simplexmethode. Daarna zijn er verschillende variaties van deze methode uitgewerkt, terwijl er eveneens geheel andere methoden ontwikkeld zijn. De op de simplexmethode gebaseerde oplossingsmethoden zijn in de praktijk steeds de beste gebleken. Wij behandelen in dit hoofdstuk na een

overzicht van de oorspronkelijke vorm van de simplexmethode, de herziene simplexmethode (revised simplex method), waarmee de berekeningen in het algemeen aanzienlijk minder tijd vergen dan met de oude vorm.

2. De grondgedachte van de simplexmethode.

Wij gaan uit van de volgende vorm van een lineair programmeringsprobleem:

$$\text{maximaliseer} \quad z_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.1)$$

$$\text{onder de voorwaarden} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_{i0} \quad (i=1, \dots, m) \quad (2.2)$$

$$\text{en} \quad x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n). \quad (2.3)$$

De constanten c_j en a_{ij} zijn alle gegeven; de a_{i0} worden ≥ 0 ondersteld. Indien een probleem deze vorm niet bezit, dan kan het altijd hiertoe herleid worden.

Gebruikt men vectornotatie, dan kan het door (2.1), (2.2) en (2.3) gegeven probleem ook als volgt geschreven worden:

$$\text{maximaliseer} \quad x_0 = C X^1) \quad (2.1')$$

$$\text{onder de voorwaarden} \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j = A_0 \quad (2.2')$$

$$\text{en} \quad X \geq 0. \quad (2.3')$$

$$\text{Hierin is } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j=0, \dots, n).$$

C en X zijn n -dimensionale vectoren, waarin n gelijk is aan het aantal verschillende variabelen dat een rol speelt, terwijl de vectoren A_j ($j=0, \dots, n$) m -dimensionaal zijn en m bepaald wordt door het aantal bijvoorwaarden, dat in (2.2) is opgenomen.

Formule (2.2') kan nog enigszins anders opgeschreven worden wanneer men de vectoren $(A_1, \dots, A_n)$ samenbrengt tot de matrix A .

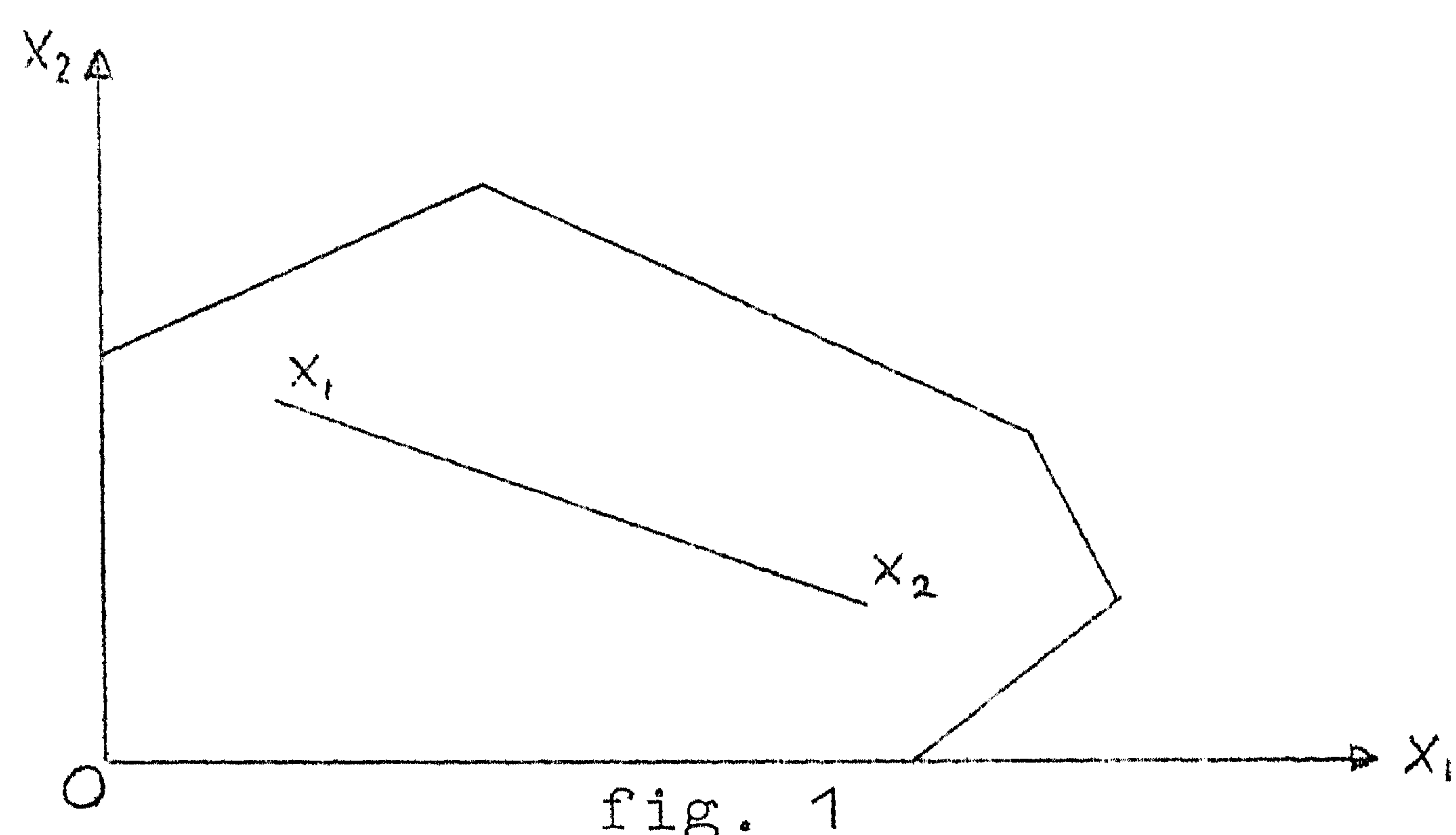
1) Vectoren worden met hoofd-drukletters aangegeven; tussen zij- en kolomvectoren wordt geen onderscheid gemaakt. Matrices worden met hoofd-schrijffletters aangegeven.

A is dus de m bij n matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ en (2.2') gaat over in

$$A.X = A_0 \quad (2.2'')$$

Het probleem kan nu als volgt geïnterpreteerd worden: gevraagd een vector X te berekenen, die aan (2.2') en (2.3') voldoet en z maximaal maakt.

Een vector X die aan (2.2') en (2.3') voldoet noemen wij een toegelaten vector en deze correspondeert dus met een toegelaten oplossing. Wij zoeken nu onder de toegelaten vectoren diegene, waarbij z maximaal is. Voorlopig nemen wij aan dat er één of meer toegelaten vectoren zijn. Men kan bewijzen dat de verzameling van toegelaten vectoren convex is; dit betekent dat wanneer x_1 en x_2 er toe behoren, dat dan ook de vector $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) tot de verzameling behoort. Men vergelijkt figuur 1, waarin de situatie voor twee dimensies geschetst is. Bovendien kan men aantonen dat de verzameling niet door ronde lijnstukken wordt begrensd, maar bijvoorbeeld in twee dimensies alleen door rechte lijnstukken en hoekpunten (vgl. figuur 1). Evenzo wordt de verzameling van toegelaten vectoren in een drie-dimensionaal probleem alleen begrensd door vlakke veelhoeken, rechte lijnstukken en hoekpunten. De verzameling van toegelaten vectoren bezit bij problemen in ruimten met meer dimensies overeenkomstige eigenschappen.



De verzameling van toegelaten vectoren is convex.

De volgende twee stellingen kunnen nu bewezen worden:

Stelling 1 De functie $z_0 = C.X$ bereikt de extreme waarden in hoekpunten van de verzameling van toegelaten vectoren.

Stelling 2 Een vector X is dan en slechts dan een hoekpunt van de verzameling van toegelaten vectoren, wanneer de coëfficiënten $x_j > 0$ corresponderen met vectoren A_j uit A die lineair onafhankelijk zijn.

Stelling 1 houdt in dat wij ons bij het zoeken naar het maximum kunnen beperken tot de hoekpunten van het toegelaten gebied. Uit stelling 2 volgt dan dat er altijd een optimale vector X bestaat, waarvan hoogstens m elementen $\neq 0$ zijn. Zolang er geen complicaties optreden (zogenaamde ontaarding) bezitten de bij de hoekpunten behorende vectoren precies m elementen $\neq 0$. De vectoren A_i die bij deze elementen horen vormen dan een basis van de m -dimensionale ruimte, waarin de vectoren A_j liggen; de betreffende oplossingen worden daarom basisoplossingen genoemd. Aangezien men, wanneer er in een hoekpunt minder dan m elementen van X ongelijk nul zijn, de bij deze elementen behorende vectoren A_i altijd kan aanvullen tot een basis, noemt men ook in dit geval de oplossing een basisoplossing.

De eerste conclusie luidt dus, dat wij bij het zoeken naar de optimale oplossing alleen basisoplossingen behoeven te vergelijken.

Verder volgt uit het feit dat men op hoogstens $\binom{n}{m}$ verschillende manieren een basis uit de vectoren $A_1, \dots, A_n$ kan vormen, dat het aantal verschillende basisoplossingen $\leq \binom{n}{m}$ is. Wanneer men er nu voor zorgt dat twee basisoplossingen tijdens het oplossen nooit meer dan één keer met elkaar vergeleken worden, dan luidt de tweede conclusie: de oplossingsmethode leidt in een eindig aantal stappen tot de optimale oplossing.

Bij de simplexmethode worden steeds hoekpunten vergeleken met de eigenschap dat de bijbehorende basissen $(m-1)$ vectoren gemeenschappelijk hebben. Dit betekent dus dat tijdens het iteratieproces bij iedere stap hoogstens één oude variabele > 0 , nul kan worden en dat ook hoogstens één variabele van nul positief kan worden.

3. Het iteratieproces bij de simplexmethode.

Laten wij aannemen dat wij beschikken over de basisoplossing $X = (x_{10}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0)$. De met deze oplossing corresponderende basisvectoren zijn $A_1, \dots, A_m$. Alle vectoren $A_j (j=1, \dots, n)$ kunnen dus geschreven worden in de vorm

$$A_j = \sum_{i=1}^m A_i x_{ij}. \quad (3.1)$$

Volgens (2.2') geldt

$$A_0 = \sum_{i=1}^m A_i x_{i0}; \quad (3.2)$$

formule (3.1) is dus ook voor $j=0$ juist. De m elementen van X die dezelfde indices hebben als de basisvectoren vormen samen de m -dimensionale vector X_0 .

Voegen wij de vectoren $A_1, \dots, A_m$ samen tot een vierkante matrix B , dan kunnen (3.1) en (3.2) ook geschreven worden in de vorm

$$A_j = B \cdot X_j \quad (j = 0, \dots, n), \quad (3.3)$$

waarin $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$.

Opmerking. In tegenstelling tot de vector X_0 waarvan alle elementen ≥ 0 moeten zijn (vgl. (2.3')) kunnen de elementen van de vectoren X_j zowel positief, nul als negatief zijn.

Uit (3.1) volgt dat A_j gelijkwaardig is aan een bepaalde lineaire combinatie van de vectoren $A_1, \dots, A_m$. Aan de voorwaarde (2.2') blijft dus voldaan, wanneer wij in (3.2) de vectoren $A_1, \dots, A_m$ in de juiste verhouding genomen, vervangen door een andere vector, bijvoorbeeld A_1 . Voeren wij in (3.2) de nieuwe vector in met coëfficiënt $\theta (> 0)$, dan betekent dit dat in de nieuwe toegelaten vector X' , het element $x'_{01} = \theta$ is. De functie z wordt dus $c_1 \theta$ groter. Anderzijds worden de positieve elementen van X_0 verminderd met θ keer de elementen van X_1 , waardoor de functie $\theta \cdot \sum_{i=1}^m c_i x_{i1}$ kleiner wordt. De som $\sum_{i=1}^m c_i x_{i1}$ wordt aangegeven met z_1 .

De nieuwe waarde z'_0 van de te maximaliseren functie kan uit de oude gevonden worden met de formule

$$z'_0 = z_0 + \theta(c_1 - z_1). \quad (3.4)$$

De transformatie maakt de functie dus groter wanneer $\theta(c_1 - z_1) > 0$ is. Volgens (2.3) moet $\theta \geq 0$ zijn en dus volgt uit (3.4) dat z_0 slechts kan toenemen wanneer $c_1 - z_1 > 0$ is of $z_1 - c_1 < 0$. Indien de waarde van z_0 inderdaad groter wordt door de variabele x_1 een positieve waarde te geven, dan ligt het voor de hand, dit in zo sterk mogelijke mate te doen. Om na te gaan hoe ver men hiermee kan gaan tellen wij $\theta (> 0)$ keer vergelijking (3.1) voor $j=1$ op bij (3.2). Het resultaat luidt

$$\sum_{i=1}^m A_i (x_{i0} - \theta x_{i1}) + A_1 \cdot \theta = A_0. \quad (3.5)$$

Een oplossing moet voldoen aan (2.3) en dus moet gelden

$$\theta \geq 0, x_{i0} - \theta x_{i1} \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) . \quad (3.6)$$

Wegens $\theta \geq 0$ en $x_{i0} \geq 0$ is hieraan voor iedere $x_{i1} \leq 0$ voldaan. De waarde van θ kan dus hoogstens gelijk worden gekozen aan het minimum van de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{i1}}$ met $x_{i1} > 0$. Gezien het bovenstaande kiezen wij steeds

$$\theta = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{i1}} \quad (x_{i1} > 0) . \quad (3.7)$$

Laat dit minimum bereikt worden voor $i=r$ en alleen voor $i=r$; dan is $\theta = \frac{x_{r0}}{x_{r1}}$. Als nieuwe toegelaten vector X' hebben wij nu gevonden

$$X' = (x_{10} - \frac{x_{r0}}{x_{r1}} x_{11}, \dots, x_{r-1,0} - \frac{x_{r0}}{x_{r1}} x_{r-1,1}, 0, x_{r+1,0} + \frac{x_{r0}}{x_{r1}} x_{r+1,1}, \dots, x_{m,0} - \frac{x_{r0}}{x_{r1}} x_{m1}, 0, \dots, 0, \frac{x_{r0}}{x_{r1}}, 0, \dots, 0) . \quad (3.8)$$

Het deel van de vector X' dat met de nieuwe basisvectoren correspondeert (dus met $A_1, \dots, A_{r-1}, A_{r+1}, \dots, A_m, A_1$) wordt weer X'_0 genoemd. De nieuwe waarden van de variabelen, die zowel in de oude als in de nieuwe oplossing voorkomen, wordt volgens (3.8) gevonden door de transformaties

$$x'_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{r0}}{x_{r1}} \cdot x_{i1} \quad (i \neq 1) . \quad (3.9)$$

De waarde van de variabele die in de nieuwe oplossing positief is, maar in de oude nul, volgt uit

$$x'_{10} = \frac{x_{r0}}{x_{r1}} . \quad (3.10)$$

Substitueert men deze oplossing in (2.2'), dan vindt men

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m A_i (x_{i0} - \frac{x_{r0}}{x_{r1}} x_{i1}) + A_1 \cdot \frac{x_{r0}}{x_{r1}} = A_0 . \quad (3.11)$$

De nieuwe basis is $B' = (A_1, \dots, A_{r-1}, A_{r+1}, \dots, A_m, A_1)$; alle vectoren A_j kunnen uitgedrukt worden in de vorm van een lineaire combinatie van de vectoren in B' . De nieuwe coëfficiënten kunnen op de volgende manier uit de oude worden afgeleid. Uit (3.1) volgt voor $j=1$

$$A_r = \frac{1}{x_{r1}} (A_1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m A_i x_{i1}), \quad (3.12)$$

hetgeen na substitutie in (3.1) voor A_j leidt tot

$$A_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m A_i x_{ij} + \frac{x_{rj}}{x_{r1}} (A_1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m A_i x_{i1})$$

of

$$A_j = \frac{x_{rj}}{x_{r1}} A_1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m A_i (x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{r1}} x_{i1}). \quad (3.13)$$

Op deze wijze is A_r geëlimineerd uit (3.1). De nieuwe coëfficiënten van de vectoren die zowel in B als in B' voorkomen volgen uit

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{r1}} \cdot x_{i1} \quad (i \neq 1) \quad (3.14)$$

en die van de nieuw opgenomen vector A_1 uit

$$x'_{1j} = \frac{x_{rj}}{x_{r1}}. \quad (3.15)$$

Deze formules zijn dus geheel analoog aan (3.9) respectievelijk (3.10). In vectornotatie luiden de nieuwe vergelijkingen

$$A_j = B' \cdot X'_j \quad (j = 0, \dots, n). \quad (3.16)$$

Uitgaande van de nieuwe toegelaten basisoplossing X'_0 kan met behulp van de vectoren X'_j dezelfde redenering toegepast worden als met de vectoren X_0 en X_j is gedaan.

De nieuwe waarden $(z_j - c_j)'$ kunnen op eenvoudige wijze uit de oude worden afgeleid. Volgens de definitie van z_j , (3.14) en (3.15) is

$$\begin{aligned} (z_j - c_j)' &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m x'_{ij} c_i + x'_{1j} c_1 - c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m (x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{r1}} x_{i1}) c_i + \\ &+ \frac{x_{rj}}{x_{r1}} c_1 - c_j = z_j - x_{rj} c_r - \frac{x_{rj}}{x_{r1}} \sum_{i=1}^m c_i x_{i1} + \frac{x_{rj}}{x_{r1}} x_{r1} c_r + \\ &+ \frac{x_{rj}}{x_{r1}} c_1 - c_j = (z_j - c_j) - \frac{x_{rj}}{x_{r1}} (z_1 - c_1), \end{aligned}$$

$$\text{dus} \quad (z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{x_{rj}}{x_{r1}} (z_1 - c_1) \quad (3.17)$$

Deze formule heeft dezelfde structuur als (3.14): de nieuwe verschillen worden uit de oude gevonden door deze te verminderen met $\frac{x_{rj}}{x_{r1}}$ maal het oude element, behorende bij A_1 .

Tenslotte blijkt uit een vergelijking van (3.4) en (3.17) dat z'_0 uit z_0 gevonden wordt door een transformatie van de vorm (3.17), wanneer men hierin $C_0 = 0$ substitueert en voor θ de door (3.7) bepaalde waarde $\frac{x_{r0}}{x_{r1}}$.

Er is dus een grote overeenkomst in alle transformatieformules: van alle vectoren X'_j wordt één element gevonden door het oude te delen door x_{r1} , terwijl alle andere elementen van de vectoren X'_j en de nieuwe verschillen $(z_j - c_j)'$ ($j = 0, \dots, n$) bepaald worden door de geheel analoge formules (3.9), (3.14) en (3.17).

De gang van zaken bij de simplexmethode is nu als volgt:

- 1) bepaal, uitgaande van een toegelaten basisoplossing X_0 met bijbehorende basis B de vectoren X_j door de transformatie $A_j = B \cdot X_j$ of $X_j = B^{-1} \cdot A_j$ ($j = 1, \dots, n$);
- 2) bepaal de verschillen $z_j - c_j$ voor alle vectoren A_j die niet in de basis zijn opgenomen (voor de vectoren die wel in de basis zijn opgenomen hebben deze verschillen de waarde nul);
- 3) wanneer één of meer van de verschillen $z_j - c_j$ negatief zijn, bepaal dan het kleinste van deze verschillen; laat dit bereikt worden voor $j = 1$ en alleen voor $j = 1$;
- 4) bepaal het minimum van de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{i1}}$ voorzover $x_{i1} > 0$ is; laat dit minimum bereikt worden voor $i = r$ en alleen voor $i = r$;
- 5) beschouw als nieuwe basis B' van de ruimte de oude vectoren, afgezien van A_r en aangevuld met A_1 ;
- 6) druk de vectoren A_j ($j=0, \dots, n$) door middel van de transformaties (3.9), (3.10), (3.14) en (3.15) uit in de nieuwe basis B' ; hiermee zijn de nieuwe vectoren X'_j ($j=0, \dots, n$) gevonden;
- 7) bepaal de nieuwe variabelen $(z_j - c_j)'$ ($j=0, \dots, n$) door middel van de transformaties (3.17);
- 8) zie punt 3).

Enzovoorts.

Met behulp van de volgende stelling kan worden nagegaan of het maximum reeds is gevonden.

Stelling 3.

Wanneer in een bepaalde stap alle verschillen $z_j - c_j \geq 0$ zijn, dan is het maximum van de functie z_0 bereikt.

Bewijs: Laten in een stap $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ de basisvectoren zijn, zodat geldt

$$\sum_{i=i_1}^{i_m} x_{ij} A_i = A_j \quad (j=0, \dots, n) \quad (3.18)$$

en laat voor iedere $j (j=1, \dots, n)$ $z_j - c_j \geq 0$ zijn, dus

$$\sum_{i=i_1}^{i_m} c_i x_{ij} - c_j \geq 0. \quad (3.19)$$

Voor een willekeurige andere basis $A_{l_1}, \dots, A_{l_m}$ is

$$A_0 = \sum_{l=l_1}^{l_m} x_{l0} A_l = \sum_{l=l_1}^{l_m} x_{l0} \left(\sum_{i=i_1}^{i_m} x_{il} A_i \right) = \sum_{i=i_1}^{i_m} \left(\sum_{l=l_1}^{l_m} x_{l0} x_{il} \right) A_i. \quad (3.20)$$

Aangezien iedere vector op slechts één manier in de basisvectoren uitgedrukt kan worden volgt uit (3.18) voor $j=0$ en (3.20)

$$x_{i0} = \sum_{l=l_1}^{l_m} x_{l0} x_{il} \quad (i=i_1, \dots, i_m). \quad (3.21)$$

Kiest men $A_{l_1}, \dots, A_{l_m}$ als basis, dan is de bijbehorende waarde van de functie z_0 : $\sum_{l=l_1}^{l_m} c_l x_{l0}$. Deze waarde is kleiner dan de bij

$A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ behorende waarde; immers met behulp van (3.19) en (3.21) vindt men

$$\sum_{l=l_1}^{l_m} c_l x_{l0} \leq \sum_{l=l_1}^{l_m} \left(\sum_{i=i_1}^{i_m} c_i x_{il} \right) x_{l0} = \sum_{i=i_1}^{i_m} c_i \left(\sum_{l=l_1}^{l_m} x_{il} x_{l0} \right) = \sum_{i=i_1}^{i_m} c_i x_{i0}.$$

q.e.d.

Het proces wordt derhalve beëindigd wanneer bij punt 2) blijkt dat alle $z_j - c_j \geq 0$ zijn. Zijn bij punt 4) in een bepaalde stap alle $x_{il} \leq 0$, dan kan de waarde van de functie willekeurig

4. Het derde voorbeeld.

Thans zullen wij veronderstellen, dat wij belast zijn met de inkoop van één speciaal soort dameshoedje.

Dit hoedje kan in iedere gewenste hoeveelheid besteld worden op 1 februari. Tussen 1 februari en 1 juli is het in de normale verkoop, daarna verdwijnt het in de uitverkoop alwaar het met absolute zekerheid tegen een sterk gereduceerde prijs wordt verkocht.

Op 1 februari moeten wij dus beslissen hoeveel hoedjes het aanstaande voorjaar in de verkoop gebracht zullen worden. Onze keuze zal afhangen van de volgende gegevens:

- a) de inkoopkosten bedragen $Q(q)$ voor een partij van de omvang q ;
- b) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt a_1 per hoedje;
- c) de verkoopprijs in de uitverkoop bedraagt a_2 per hoedje;
- d) de voorraadkosten bedragen C_1 voor ieder hoedje een geheel seizoen in voorraad;
- e) de verdeling van de vraag wordt gegeven door de kansdichtheid $f(x)$.

De kansverdeling onder e) is uiteraard een benadering van de werkelijke vraagverdeling, die discreet is.

Uitgaande van de veronderstelling, dat de vraag gelijkmatig over de periode 1 februari - 1 juli is gespreid, zullen wij twee alternatieve mogelijkheden aan een beschouwing onderwerpen:

1. In de behoefte kan door de voorraad worden voorzien.
De voorraad is dan gemiddeld

$$\frac{q+q-x}{2} = q - \frac{x}{2} \quad (22)$$

groot en de kosten worden gegeven door:

$$K_1(q) = Q(q) + (q - \frac{x}{2}) C_1 \quad \text{als } x \leq q. \quad (23)$$

De inkomsten worden daarentegen gegeven door:

$$I_1(q) = a_1 x + a_2 (q-x) \quad \text{als } x \leq q. \quad (24)$$

2. In de behoefte kan niet door de voorraad worden voorzien.
Op analoge wijze als in het eerste voorbeeld vindt men dat tijdens een periode van de lengte $\frac{q}{x}$ voorraad aanwezig is en wel gemiddeld $\frac{1}{2}q$. De voorraadkosten en inkoopkosten tezamen bedragen dan:

$$K_2(q) = Q(q) + \frac{1}{2} \frac{q^2 C_1}{x} \quad \text{als } x \geq q. \quad (25)$$

De inkomsten worden nu gegeven door:

$$I_2(q) = a_1 q \quad \text{als } x \geq q. \quad (26)$$

Met behulp van (23) t/m (26) kan eenvoudig worden nagegaan, dat de verwachting van de winst gegeven wordt door:

$$W(q) = \int_0^q \left\{ a_1 x + a_2 (q-x) - (q-\frac{x}{2}) C_1 \right\} f(x) dx + \int_q^\infty \left\{ a_1 q - \frac{1}{2} q^2 \frac{C_1}{x} \right\} f(x) dx - Q(q). \quad (27)$$

De functie $W(q)$ is slechts dan maximaal voor $q=q^*$, indien voor deze waarde van q geldt:

$$W'(q^*) = 0. \quad (28)$$

Uit (27) en (28) volgt voor $q=q^*$:

$$W'(q) = \int_0^q (a_2 - C_1) f(x) dx + \int_q^\infty \left(a_1 - \frac{q C_1}{x} \right) f(x) dx - Q'(q) = 0 \quad (29)$$

of

$$a_2 - C_1 + \int_{q^*}^\infty \left(a_1 - \frac{q^* C_1}{x} - a_2 + C_1 \right) f(x) dx - Q'(q^*) = 0. \quad (30)$$

Het criterium wordt nu gegeven door (30):

$$M(q^*) \equiv a_2 - C_1 + \int_{q^*}^\infty \left(a_1 - \frac{q^* C_1}{x} - a_2 + C_1 \right) f(x) dx - Q'(q^*) = 0.$$

In onze beschouwing werd tot dusver geen rekening gehouden met het verlies aan "goodwill" door "neen-verkoop". Het is uiteraard voor het modehuis geen reclame als de klanten onverrichterzake de winkel weer verlaten. Het verlies aan "goodwill" is echter slecht te meten. Wel kan men dikwijls aangeven welk bedrag de eigenaar bereid is uit te geven, opdat de klant een volgende keer zal terugkeren.

Wij zullen deze kosten aangeven met C_3 , alhoewel deze constante in een vorig voorbeeld gebruikt is voor de noodinkopen per eenheid. Men kan de dubbele betekenis van de constante C_3 gemakkelijk rechtvaardigen, immers in beide gevallen probeert men het "uitverkocht zijn" af te kopen.

Aan het rechterlid van de betrekking (25) moet nu een term van de grootte $C_3(x-q)$ worden toegevoegd:

Voor $W(q)$, de verwachting van de winst, vinden wij dan:

$$W(q) = \int_0^q \left\{ a_1 x + a_2 (q-x) - C_1 \left(q - \frac{x}{2} \right) Q f(x) dx + \right. \\ \left. + \int_q^\infty \left\{ a_1 q - C_3 (x-q) - \frac{\frac{1}{2} C_1 q^2}{x} \right\} f(x) dx - Q(q) \right. \quad (31)$$

Het criterium wordt nu gegeven door:

$$M(q^*) \equiv a_2 - C_1 + \int_{q^*}^\infty \left(a_1 + C_3 - \frac{C_1 q^*}{x} - a_2 + C_1 \right) f(x) dx - Q'(q^*) = 0. \quad (32)$$

Van het bovenstaande resultaat zullen wij thans een toepassing bespreken. Wij zullen uitgaan van de volgende gegevens:

- a) de inkoopprijs van een hoedje bedraagt dertig gulden, m.a.w. $Q(q) = 30q$;
- b) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt vijftig gulden, m.a.w. $a_1 = 50$;
- c) de verkoopprijs in de uitverkoop is twintig gulden, dus $a_2 = 20$;
- d) de voorraadkosten bedragen vijf gulden per seizoen per hoedje, dus $C_1 = 5$;
- e) de kansverdeling van de vraag wordt gegeven door $f(x) = (0,02)^2 x e^{-0,02x}$; (33)
- f) het verlies C_3 aan goodwill voor ieder hoedje te weinig in voorraad wordt achtereenvolgens getaxeerd op 0,5, 10, 15, 20, 25 en 30 gulden.

De relatie (32) wordt in dit speciale geval gegeven door

$$(35 + C_3) \int_{0,02q^*}^\infty t e^{-t} dt - 0,1q^* \int_{0,02q^*}^\infty e^{-t} dt = 15 \quad (34)$$

of na enig rekenen:

$$(0,6 + 0,02 C_3) q^* e^{-0,02q^*} + (35 + C_3) e^{-0,02q^*} = 15. \quad (35)$$

Indien wij deze betrekking oplossen naar q^* vinden wij:

$$\begin{array}{ll}
 q^* = 88 & \text{als } c_3 = 0 \\
 q^* = 96 & c_3 = 5 \\
 q^* = 109 & c_3 = 10 \\
 q^* = 117 & c_3 = 15 \\
 q^* = 124 & c_3 = 20 \\
 q^* = 130 & c_3 = 25 \\
 q^* = 136 & c_3 = 30 .
 \end{array} \quad (36)$$

Dit voorbeeld is een generalisatie van het tweede voorbeeld. Het tweede voorbeeld ontstaat uit het derde, indien men voor de parameters a_2 en c_1 de waarde nul kiest.

5. Het vierde voorbeeld.

In ons vierde voorbeeld wordt aangenomen, dat wij geheel vrij zijn in de keuze van ons besteltijdstip. Om de gedachten te bepalen zullen wij veronderstellen, dat van een voorraad machineonderdelen het beheer aan ons is toevertrouwd.

Een hoeveelheid q van deze onderdelen is tegen de inkoopprijs $Q(q)$ te betrekken bij de dealer.

De voorraadkosten bedragen C_1 per eenheid en per tijdseenheid.

Vervolgens wordt verondersteld, dat slechts één eenheid per keer wordt gevraagd. Aan deze vraag moet worden voldaan. Later zullen wij een benaderingsmethode geven met behulp waarvan ook voorraadproblemen kunnen worden opgelost, waarin afnamen van meer dan één eenheid voorkomen.

Aangezien de door ons bestelde goederen terstond worden afgeleverd, zal pas een nieuwe bestelling worden opgegeven, indien niet meer aan de behoefte kan worden voldaan. (zie fig. 3)

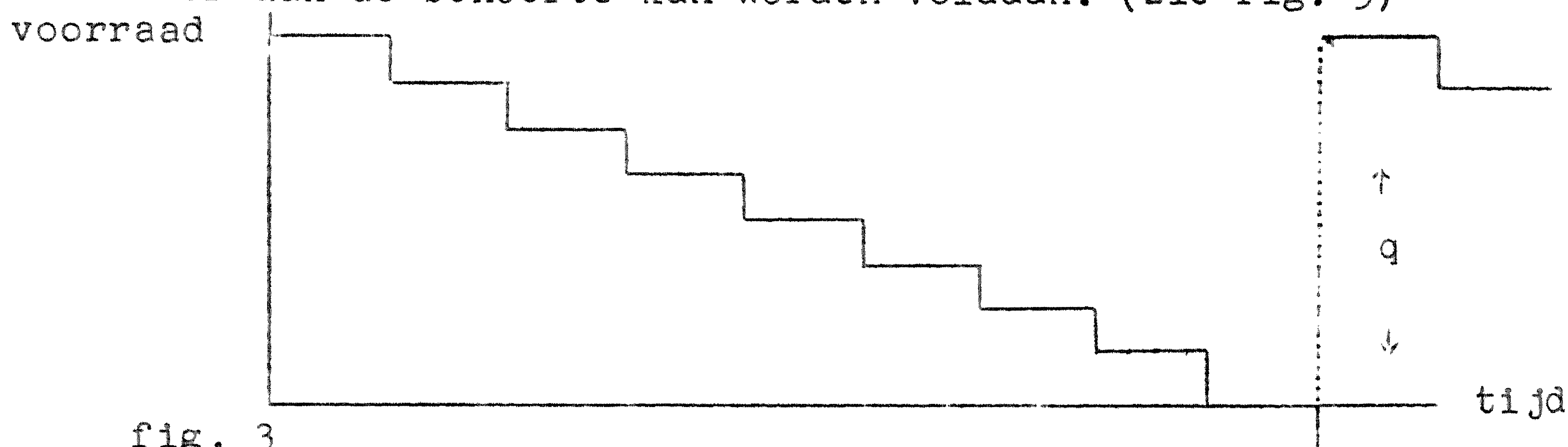


fig. 3

Het verloop van de voorraad.

Indien q de hoeveelheid ingekochte goederen voorstelt, dan daalt de voorraad van $q-1$ tot nul, in het tijdsinterval tussen twee opéénvolgende besteltijdstippen.

Als de vraag constant is en gegeven wordt door α eenheden per tijdseenheid, dan zal om de $\frac{1}{\alpha}$ tijdseenheden een nieuw onderdeel moeten worden verstrekt.

Men kan nu eenvoudig nagaan dat de voorraadkosten voor het gehele tijdsinterval gegeven worden door:

$$\frac{C_1}{\alpha} \sum_{i=1}^{q-1} (q-i) = \frac{C_1}{\alpha} \sum_{i=1}^{q-1} i = \frac{\frac{1}{2}C_1 q(q-1)}{\alpha} . \quad (37)$$

De inkoopkosten bedragen wederom $Q(q)$, zodat voor de totale kosten $K(q)$ gevonden wordt:

$$K(q) = \frac{\frac{1}{2}q(q-1)C_1}{\alpha} + Q(q) . \quad (38)$$

Aangezien zowel $\frac{\frac{1}{2}q(q-1)C_1}{\alpha}$ als $Q(q)$ monotoon niet dalende functies zijn van q , wordt de minimale waarde van $K(q)$ bereikt voor $q=0$. Deze waarde van q is echter uitgesloten, omdat altijd aan de vraag moet worden voldaan en dus vinden wij $q=1$ als optimale bestelgrootte.

Wanneer wij deze oplossing aan een nadere beschouwing onderwerpen, dan blijkt dat de optimale keuze van q niet afhangt van de waarde van C_1 en de wijze, waarop kortingen worden verleend voor grote orders.

De hierboven gegeven oplossingsmethode is dan ook niet juist.

Men dient zich nl. allereerst af te vragen welk doel men met de inkooppolitiek tracht te bereiken. Daartoe kan men de volgende criteria onderscheiden:

- 1) Van de optimale inkooppolitiek wordt verwacht, dat aan het eind van een zeer lange van te voren gegeven periode de (verwachting van de) totale kosten over die periode lager zijn dan van elke andere politiek.
- 2) Van de optimale inkooppolitiek wordt geëist dat de totale kosten in een periode (of de verwachting van die kosten) waar in een van te voren gegeven zeer grote hoeveelheid goederen wordt verbruikt, minimaal zijn.

Men kan onder zeer algemene voorwaarden bewijzen dat beide criteria dezelfde optimale inkooppolitiek aanwijzen indien "zeer groot" door onbegrensd wordt vervangen in de beide criteria.

Aangezien wij op ieder besteltijdstip aannemen, dat wij aan het begin staan van een periode, zoals deze wordt ondersteld in één van de beide criteria, zullen de ordergrootten steeds gelijk zijn.

Stel dat wij onze overwegingen baseren op het tweede criterium en dat wij vervolgens twee alternatieve inkooppolitieken S_1 en S_2 vergelijken met de bestelgrootten resp. q_1 en q_2 .

Kiezen wij nu als "zeer grote hoeveelheid" de waarde Nq_1q_2 dan zijn er Nq_2 tijdsintervallen, waarin q_1 wordt verbruikt en Nq_1 tijdsintervallen, waarin in totaal q_2 wordt gevraagd.

De kosten worden dan voor de politiek S_1 gegeven door:

$$Nq_2 \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_1(q_1-1)C_1}{\alpha} + Q(q_1) \right\} \quad (39)$$

en voor de politiek S_2 door:

$$Nq_1 \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_2(q_2-1)C_1}{\alpha} + Q(q_2) \right\}. \quad (40)$$

De politiek S_1 is te verkiezen boven S_2 als geldt:

$$Nq_2 \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_1(q_1-1)C_1}{\alpha} + Q(q_1) \right\} < Nq_1 \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_2(q_2-1)C_1}{\alpha} + Q(q_2) \right\} \quad (41)$$

of na deling door Nq_2q_1 :

$$\left\{ \frac{\frac{1}{2} q_1(q_1-1)C_1 + \alpha Q(q_1)}{\alpha q_1} \right\} < \left\{ \frac{\frac{1}{2} q_2(q_2-1)C_1 + \alpha Q(q_2)}{\alpha q_2} \right\}. \quad (42)$$

Uit de ongelijkheid (42) kan men zonder veel moeite vaststellen, dat voor een optimale politiek moet gelden:

$$k(q) = \frac{\frac{1}{2}(q-1)C_1}{\alpha} + \frac{Q(q)}{q} \quad (43)$$

is minimaal.

Bezwaar kan gemaakt worden tegen het subjectieve element "zeer groot" in de beide criteria. De basis ongelijkheid (42) is echter onafhankelijk van N . Om deze eventuele bezwaren op te heffen, veronderstellen wij dat $N \rightarrow \infty$.

Schrijven wij vervolgens voor $Q(q)$:

$$Q(q) = q b(q) + C_0 \quad (44)$$

dan geldt als het minimum van $k(q)$ bereikt wordt voor $q=q^*$:

$$k'(q^*) = \frac{C_1}{2\alpha} + b'(q^*) - \frac{C_0}{(q^*)^2} = 0. \quad (45)$$

Het beslissingscriterium wordt in dit voorbeeld dus gegeven door

$$M'(q^*) \equiv \frac{C_1}{2\alpha} + b'(q^*) - \frac{C_0}{(q^*)^2} = 0. \quad (46)$$

Indien $Q(q)$ is van de vorm:

$$Q(q) = qq + C_0 \quad (47)$$

dan geldt: $b'(q) = 0$ en vinden wij voor de optimale bestelgrootte q^* :

$$q^* = \sqrt{\frac{2\alpha C_0}{C_1}}. \quad (48)$$

Veelal is de vraag niet constant, maar een stochastische grootheid, waaraan een kansverdeling is toegevoegd. Wij zullen nu aannemen, dat de kansverdeling van de vraag voor alle intervallen met een gegeven lengte gelijk zijn, onverschillig de ligging van het begintijdstip.

5. Twee variaties op de simplexmethode.

Volgens (3.4) neemt de waarde van de te maximaliseren functie toe bij een bepaalde stap, wanneer $\Theta(c_\ell - z_\ell) > 0$ is. Daar wij Θ niet negatief moeten kiezen, dient dus $c_\ell - z_\ell > 0$ te zijn, of $z_\ell - c_\ell < 0$. Bij de in paragraaf 3 beschreven iteratiemethode werd steeds de meest negatieve waarde van $z_\ell - c_\ell$ opgezocht. Daar de mate waarin z_0 toeneemt door $\Theta_0(c_\ell - z_\ell)$ wordt bepaald, ligt het meer voor de hand bij iedere stap die vector A_ℓ in de basis op te nemen, waarvoor $\Theta(c_\ell - z_\ell)$ maximaal is, omdat men dan mag verwachten het maximum in een kleiner aantal stappen te bereiken. In het algemeen is dit inderdaad het geval, doch hier staat tegenover dat de tijd nodig om één stap uit te voeren groter wordt; immers voor iedere $z_j - c_j < 0$ moeten nu de elementen $x_{ij} > 0$ opgespoord worden en de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ij}}$ ($x_{ij} > 0$) bepaald. De ervaring leert dat bij handberekeningen (eventueel met behulp van tafelmachines) de tijdswinst verkregen door het kleinere aantal stappen meestal ruimschoots opweegt tegen de iets langere tijd nodig per stap, zodat het aan te bevelen is hierbij deze methode te gebruiken.

De tabellen I t/m III bevatten de verschillende stappen, wanneer deze methode toegepast wordt op het in paragraaf 4 behandelde voorbeeld; de pijlen geven weer aan welke vector uit de basis wordt geëlimineerd, resp. welke vector er in wordt opgenomen. De negatieve producten $\Theta(z_j - c_j)$ zijn bij de uitgangstabel -50 voor X_{10} , $-133\frac{1}{2}$ voor X_{13} , -150 voor X_{14} en -200 voor X_{15} , zodat volgens de aangegeven regel X_{15} in de basis moet worden opgenomen in de plaats van X_{16} . In paragraaf 4 werd X_{16} vervangen door X_{13} (vgl. tabel II op blz. 214). De tabel met de optimale oplossing wordt hier in twee stappen bereikt; in paragraaf 4 waren er vier stappen voor nodig.

Voor elektronische machines wordt altijd de kleinste waarde van $z_\ell - c_\ell$ gebruikt als criterium, welke vector bij de volgende stap in de basis opgenomen moet worden.

Tabel I
De uitgangstabel

B	y_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}
→ x_{16}	20	0	-1	1	0	-3	-1	-2	1	0	-1	3	2	1	1	-1	0		
x_{11}	40	1	0	1	0	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	-1	0		
x_{18}	20	1	-1	0	-2	0	1	-1	2	0	-2	3	1	-1	0	-1	1		
$z_j - c_j$	-400	15	20	5	10	25	10	15	-5	0	5	-20	-15	-10	0	10	0		

Tabel II

De eerste verbeterde oplossing

B	x_0	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}
x_{15}	-20	0	-1	0	0	-3	-1	-2	1	0	-1	3	2	1	1	-1	0
x_{11}	20	1	1	0	0	3	2	2	1	1	1	0	0	0	-1	0	0
x_{18}	40	1	-2	1	-2	-3	0	-3	3	0	-3	6	3	0	1	-2	1
$z_j - c_j$	-200	15	10	15	10	-5	0	-5	5	0	-5	10	5	0	10	0	0

↑

Tabel III

De tweede verbeterde oplossing

B	x_0	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}
x_{15}	40	1	0	1	0	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	-1	0
x_{12}	20	1	1	0	0	3	2	2	1	1	1	0	0	0	-1	0	0
x_{18}	100	4	1	1	-2	6	6	3	6	3	0	6	3	0	-2	-2	1
$z_j - c_j$	-100	20	15	15	10	10	10	5	10	5	0	10	5	0	5	0	0

De andere variaties, welke wij noemen betreffen de behandeling van de op blz. 210 ingevoerde extra variabelen $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$. Gewoonlijk voegt men bij het oplossen van dergelijke problemen een nieuwe, dus $(m+2)^{\text{de}}$ rij toe aan de tabellen, waarin de coëfficiënten van M in $z_j - c_j$ geschreven worden. De berekening wordt in twee fasen uitgevoerd. In de eerste fase gebruikt men de elementen van de nieuwe rij als criterium, welke variabele in de basis moet worden opgenomen. Men gaat hiermee door, òfwel tot de B-kolom geen van de variabelen $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$ meer bevat, òfwel tot alle coëfficiënten in de $(m+2)^{\text{de}}$ rij ≥ 0 zijn. In het eerste geval heeft men een toegelaten oplossing van het oorspronkelijke probleem bereikt en kunnen alle variabelen $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$ weggelaten worden, evenals de toegevoegde $(m+2)^{\text{de}}$ rij. In het tweede geval komt men uit op één van de volgende drie situaties:

- a) er zijn nog variabelen $x_{n+1}, \dots, x_{n+t} > 0$; volgens 2) op blz. 210 bestaat er geen oplossing van het oorspronkelijke probleem;
- b) de variabelen $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$ zijn alle nul en de bijbehorende vectoren komen geen van alle in de basis voor;
- c) de variabelen $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$ zijn alle nul, doch één of meer van de vectoren $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$ komen in de basis voor.

In de situaties b) en c) begint men aan de tweede fase. Bij b) laat men de variabelen $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$ alle verder buiten beschouwing, evenals de toegevoegde $(m+2)^{\text{de}}$ rij en men gaat verder op de gebruikelijke wijze. In geval c) kan men dit niet doen omdat dan variabelen $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$ die in het begin van de tweede fase basisvariabelen met de waarde nul zijn, later positief kunnen worden. Om dit te vermijden blijft men de $(m+2)^{\text{de}}$ rij meetransformeren en bepaalt men bij iedere stap de in de basis op te nemen vector met behulp van die $z_j - c_j$, waarvoor de coëfficiënt van M nul is.

De hier beschreven methode, waarbij men eerst een toegelaten basisoplossing zoekt en daarna de optimale, noemt men de "two-phase simplexmethod". Aangezien men variabelen $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$, welke uit de basis geëlimineerd zijn, daarin niet voor de tweede keer hoeft toe te laten is het bij de tot nu toe besproken vormen van de simplexmethode niet nodig de vectoren $x_{n+1}, \dots, x_{n+t}$ mee te transformeren.

Naast de boven beschreven methode bestaat er ook een vorm, waarbij in geval c) gedurende de tweede fase de $(m+2)^{\text{de}}$ rij wel wordt weggelaten; deze vorm is voorgesteld door G.F. HADLEY en M.A. SIMONNARD.¹⁾

1) G.F. HADLEY and M.A. SIMONNARD, A simplified two-phase technique for the simplex-method, Naval Research Logistics Quarterly 6 (1959) 221-226.

Literatuur

- [1] ARROW K.J., HURWICZ L. en UZAWA H. - "Studies in linear and non linear programming" - Stanford 1958.
- [2] BARANKIN E.W. en DOFFMAN R. - "Toward quadratic programming". O.N.R. logistics project at Columbia University and U.C.L.A. University of California at Berkeley 1958.
- [3] BEALE E.M.L. - "On minimizing a convex function subject to linear inequalities" - Journal of the Royal Stat. Soc. (series B) 17 (1955) pp. 173-184.
- [4] BEALE E.M.L. - "On quadratic programming". Technical Report nr 24. Stat. Techniques Research Group. Section of Math. Stat. Dep. of Math. Princeton University. Princeton 1958.
- [5] DEBREU G. - "Definite and semi-definite quadratic forms" - Econometrika 20 (1952) pp. 295-300.
- [6] GASS S.I. - "Linear programming". New York 1958.
- [7] FRANK M. en WOLFE P. - "An algorithm for quadratic programming". Nav. Res. Log. Quat. 3 (1956) pp. 95-110.
- [8] HILDRETH C.G. - "A quadratic programming procedure". Nav. Res. Log. Quat. 4 (1957) pp. 79-85.
- [9] HOUTHAKKER H.C. - "The capacity method of quadratic programming". Technical Report no 71 (1959). Dep. of Economics. Stanford University.
- [10] KUHN H. and TUCKER A.W. - "Non linear programming". Proc. of the 2nd Symposion of Math. Stat. and Prob. 1951, pp. 481-492.
- [11] MANN H.B. - "Quadratic forms with linear constraints" - Ann.Math.Monthly 58 (1943) pp. 430-433.
- [12] MARKOWITZ H. - "The optimization of a quadratic function subject to linear constraints". Nav.Res.Log.Quat. 3 (1956) pp. 111-133.
- [13] WILLIAMS E.J. "Regression Analysis" - New York 1959.
- [14] WOLFE P. - "The simplex method for quadratic programming" Econometrika 27 (1959) pp. 382-398.
- [15] ZOUTENDIJK G. - "Maximizing a function in a convex region. J.F.S.S. B, 21 (1959), nr 2.

6. De herziene simplexmethode.

Een nadere beschouwing van de punten 1) tot en met 8) op blz. 208 leert, dat wij bij iedere stap alleen nodig hebben: de waarden van $z_j - c_j$ om na te gaan of de optimale oplossing bereikt is en zo niet om te bepalen welke vector in de basis opgenomen moet worden, de vector X_l wanneer A_l in de basis wordt opgenomen en de vector X_0 .

Laat in een bepaalde stap B de basis zijn. In analogie met X_0 voegen wij de elementen van C met dezelfde indices als de basisvectoren samen tot de vector C_0 . Volgens de definitie van z_j (zie blz. 205) is dan

$$z_j = C_0 \cdot X_j \quad (j = 0, \dots, n) \quad (6.1)$$

Uit (3.3) volgt

$$X_j = B^{-1} \cdot A_j \quad (j = 0, \dots, n) \quad (6.2)$$

en dus is

$$z_j = C_0 B^{-1} A_j \quad (j = 0, \dots, n). \quad (6.3)$$

Wij zien derhalve dat in iedere stap de vereiste gegevens gevonden kunnen worden, mits naast de oorspronkelijke gegevens $A_0, A_1, \dots, A_n$ en C de inverse B^{-1} van de matrix B van de basisvectoren bekend is. Het is dus niet noodzakelijk bij iedere stap alle vectoren X_j ($j=0, \dots, n$) te berekenen, zoals in de simplexmethode gebeurt; het berekenen van B^{-1} is voldoende. Op deze gedachte is de herziene simplexmethode gebaseerd.

De herziene simplexmethode komt hier op neer, dat men in plaats van de vectoren X_j bij iedere stap de matrix B^{-1} transformeert. Hoewel dit niet expliciet tot uitdrukking gekomen is, wordt B^{-1} ook bij de simplexmethode in iedere stap bepaald. Volgens punt 1) op blz. 208 worden steeds de vectoren $X_j = B^{-1} A_j$ uitgerekend. Nu bevinden zich onder de vectoren A_j de m eenheidsvectoren E_i , zodat ook de produkten $B^{-1} \cdot E_i$ in iedere stap bekend zijn. Voegt men de eenheidsvectoren samen tot de eenheidsmatrix I , dan volgt hieruit dat het simplex tableau steeds de matrix

$$B^{-1} \cdot I = B^{-1} \quad (6.4)$$

bevat en dat deze afgelezen kan worden uit de kolommen van het tableau die behoren bij de eenheidsvectoren in de uitgangstabel. Men kan dus volstaan met het toepassen van de in paragraaf 3 gegeven transformatieformules op deze kolommen en transformeert dan de inverse van de matrix van basisvectoren. Gewoonlijk past men de formules toe op X_0 en op B^{-1} , zodat de herziene simplexmethode uit de volgende fasen bestaat:

- 1) zij gegeven dat X_0 een toegelaten basisoplossing is en laat de inverse van de matrix van de bijbehorende basisvectoren zijn B^{-1} ;
- 2) bepaal de vector C_0 , bestaande uit de elementen van C behorende bij de basisvariabelen;
- 3) bepaal het produkt $C_0 B^{-1}$;
- 4) bepaal de vector D_n van de verschillen $d_j = z_j - c_j = C_0 B^{-1} A_j - c_j$, waarin j alle waarden doorloopt waarvoor A_j niet in de basis is opgenomen (D_n is dus een $(n-m)$ -vector);
- 5) wanneer één of meer van de verschillen d_j negatief zijn, bepaal dan het kleinste van deze verschillen; laat dit bereikt worden voor $j=l$ en alleen voor $j=l$;
- 6) bepaal X_l met behulp van $X_l = B^{-1} \cdot A_l$; x_{10}
- 7) bepaal het minimum van de quotiënten $\frac{x_{10}}{x_{1l}}$ voor zover $x_{1l} > 0$ is; laat dit minimum bereikt worden voor $i=r$ en alleen voor $i=r$;
- 8) beschouw als nieuwe basis B' van de ruimte de oude basisvectoren, afgezien van A_r en aangevuld met A_l ;
- 9) transformeer X_0 en B^{-1} volgens (3.9), (3.10), (3.14) en (3.15);
- 10) zie punt 2);
enzovoorts.

De berekeningen kunnen gemakkelijk uitgevoerd worden in een tabel, waarin de eerste kolom de vector C_0 bevat, de tweede kolom de basisvariabelen, de derde de vector X_0 , de vierde tot en met de $(m+3)^{de}$ de matrix B^{-1} en de laatste kolom de vector X_l , wanneer A_l bij de volgende stap in de basis wordt opgenomen. De tabellen I t/m V bevatten de achtereenvolgende stappen voor het in paragraaf 4 genoemde probleem; de matrix A_n is de matrix van alle vectoren A_j die niet in de basis zijn opgenomen en de vector C_n is de corresponderende deelvector van C .¹⁾

Tabel I
De uitgangstabel

C_0	B	X_0	B^{-1}			X_{13}
0	x_{16}	20	1	0	0	3
-10	x_{11}	40	0	1	0	3
0	x_{18}	20	0	0	1	3

1) De vectoren C_0 en C_n bevatten samen alle elementen van C .

$$C_0 B^{-1} = (0 \quad -10 \quad 0)$$

$$D_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n = (15 \quad 20 \quad 5 \quad 10 \quad 25 \quad 10 \quad 15 \quad -5 \quad 5 \quad -20 \quad -15 \quad -10 \quad 10)$$

$$\rightarrow \ell = 13, x_{13} = B^{-1} A_{13} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \theta = \frac{20}{3}, r = 16.$$

Tabel II

De eerste verbeterde oplossing

$$\rightarrow$$

C_0	B	X_0	B^{-1}			x_{15}
-10	x_{13}	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
-10	x_{11}	20	-1	1	0	0
0	x_{18}	0	-1	0	1	-2

$$C_0 B^{-1} = (\frac{20}{3} \quad -10 \quad 0)$$

$$D_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n = (15 \quad \frac{40}{3} \quad \frac{35}{3} \quad 10 \quad 5 \quad \frac{10}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{5}{3} \quad -\frac{5}{3} \quad -\frac{10}{3} \quad \frac{20}{3} \quad \frac{10}{3})$$

$$\rightarrow \ell = 15, x_{15} = B^{-1} A_{15} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \theta = 20, r = 13.$$

Tabel III

De tweede verbeterde oplossing

$$\rightarrow$$

C_0	B	X_0	B^{-1}			x_7
0	x_{15}	20	1	0	0	-3
-10	x_{11}	20	-1	1	0	3
0	x_{18}	40	1	0	1	-3

$$C_0 B^{-1} = (10 \quad -10 \quad 0)$$

$$D_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n = (15 \quad 10 \quad 15 \quad 10 \quad -5 \quad 0 \quad -5 \quad 5 \quad -5 \quad 10 \quad 5 \quad 10 \quad 0)$$

$$\rightarrow \ell = 7, x_7 = B^{-1} A_7 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \theta = \frac{20}{3}, r = 11.$$

Tabel IV
De derde verbeterde oplossing

C_0	B	X_0	B^{-1}	X_{12}
0	x_{15}	40	0 1 0	0
-25	x_7	$\frac{20}{3}$	$-\frac{1}{3} \frac{1}{3} 0$	$\frac{1}{3}$
0	x_{18}	60	0 1 1	-2

$$C_0 B^{-1} = \left(\frac{25}{3} \quad -\frac{25}{3} \quad 0 \right)$$

$$C_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n = \left(\frac{50}{3} \quad \frac{35}{3} \quad 15 \quad 10 \quad \frac{10}{3} \quad -\frac{5}{3} \quad \frac{20}{3} \quad \frac{5}{3} \quad -\frac{10}{3} \quad 10 \quad 5 \quad -\frac{25}{3} \quad 0 \right)$$

$$\rightarrow l = 12, \quad x_{12} = B^{-1} A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \theta = 20, \quad r = 7.$$

Tabel V
De vierde verbeterde oplossing

C_0	B	X_0	B^{-1}	
0	x_{15}	40	0 1 0	
-5	x_{12}	20	-1 1 0	
0	x_{18}	100	-2 3 1	

$$C_0 B^{-1} = (5 \quad -5 \quad 0)$$

$$D_n = C_0 B^{-1} A_n - C_n = (20 \quad 15 \quad 15 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 10 \quad 5 \quad 10 \quad 5 \quad 5 \quad 0)$$

$\rightarrow$ maximum bereikt.

Op deze wijze verkrijgt men nog niet de waarde van het maximum, zodat die bepaald moet worden door de waarden van de basisvariabelen in de laatste stap te substitueren in de functie z_0 . Uit (6.4) en het feit dat de eenheidsvectoren onder de A_j zijn A_{16} , A_{11} en A_{18} volgt dat de inverse van B bij de in paragraaf 4 gegeven methode steeds te vinden is onder de kolommen X_{16} , X_{11} en X_{18} ; deze stemmen dan ook bij iedere stap overeen met de matrix die hier steeds geschreven is onder B^{-1} .

Door na te gaan hoeveel vermenigvuldigingen en hoeveel optellingen er bij iedere stap nodig zijn, wanneer men m bijvoorwaarden heeft en n vectoren A_j , kan aangetoond worden, dat de herziene

simplexmethode in ieder geval beter is dan de oude, wanneer geldt $n > 3m$ (vergelijk H.M. WAGNER¹⁾). Ook in andere gevallen biedt de herziene methode voordelen, in het bijzonder, wanneer de uitgangsmatrix veel nullen bevat, zoals onder andere vaak het geval is bij zogenaamde dynamische problemen (zie paragraaf 7). In een dergelijke situatie wordt de matrix van de getransformeerde vectoren X_j bij de simplexmethode gewoonlijk snel opgevuld met getallen ongelijk nul, terwijl de herziene methode blijft werken met de veel nullen bevattende oorspronkelijke vectoren A_j .

Gewoonlijk wordt nog een andere transformatie toegepast, die tot een verdere besparing in het werk leidt. Men schrijft dan in de plaats van de te maximaliseren functie

$$z_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

een nieuwe vergelijking

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + x_{n+1} = 0 \quad (6.5)$$

en minimaliseert

$$x_{n+1} = - \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

of maximaliseert de functie

$$-x_{n+1} \quad (6.6)$$

onder de oude bijvoorwaarden en (6.5) tezamen. De variabele x_{n+1} kan zowel positieve als negatieve waarden aannemen, dit dus in tegenstelling tot de variabelen $x_1, \dots, x_n$. Men verkrijgt door deze transformatie een probleem met één restrictie meer dan het oude probleem, maar met een zeer eenvoudige winstfunctie, waardoor de berekeningen in stap 3) aanzienlijk worden bekort. In het nieuwe probleem houdt men de vector X_{n+1} steeds in de basis.

Bij de tot dusverre beschreven vorm van de herziene methode wordt in iedere stap de matrix B^{-1} getransformeerd en volledig opgeschreven. Vanwege deze eigenschap noemt men dit de "revised method with full inverse form". Daarnaast bestaat een andere vorm, waarin de matrix B^{-1} niet steeds wordt opgeschreven.

----- Wij hebben gezien dat de matrix B^{-1} in iedere stap getrans-

1) H.M. WAGNER, A comparison of the original and revised simplex methods, Operations Research 5(1957) 361-369.

formeerd wordt met behulp van de formules (3.14) en (3.15); geeft men de elementen van B^{-1} aan met b_{ij} , de vector die in de basis wordt opgenomen met $X_\ell(x_1, \dots, x_{mr})$, de vector die verwijderd wordt met $X_r(x_{1r}, \dots, x_{mr})$ en de elementen van de inverse van de nieuwe basis met b'_{ij} , dan gaan de formules (3.14) en (3.15) over in

$$b'_{\ell j} = \frac{b_{rj}}{x_{r\ell}} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (6.7)$$

en

$$b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{rj}}{x_{r\ell}} \cdot x_{i\ell} \quad (i \neq \ell; j = 1, \dots, m). \quad (6.8)$$

In figuur 6.1 is dit nog eens schematisch weergegeven.

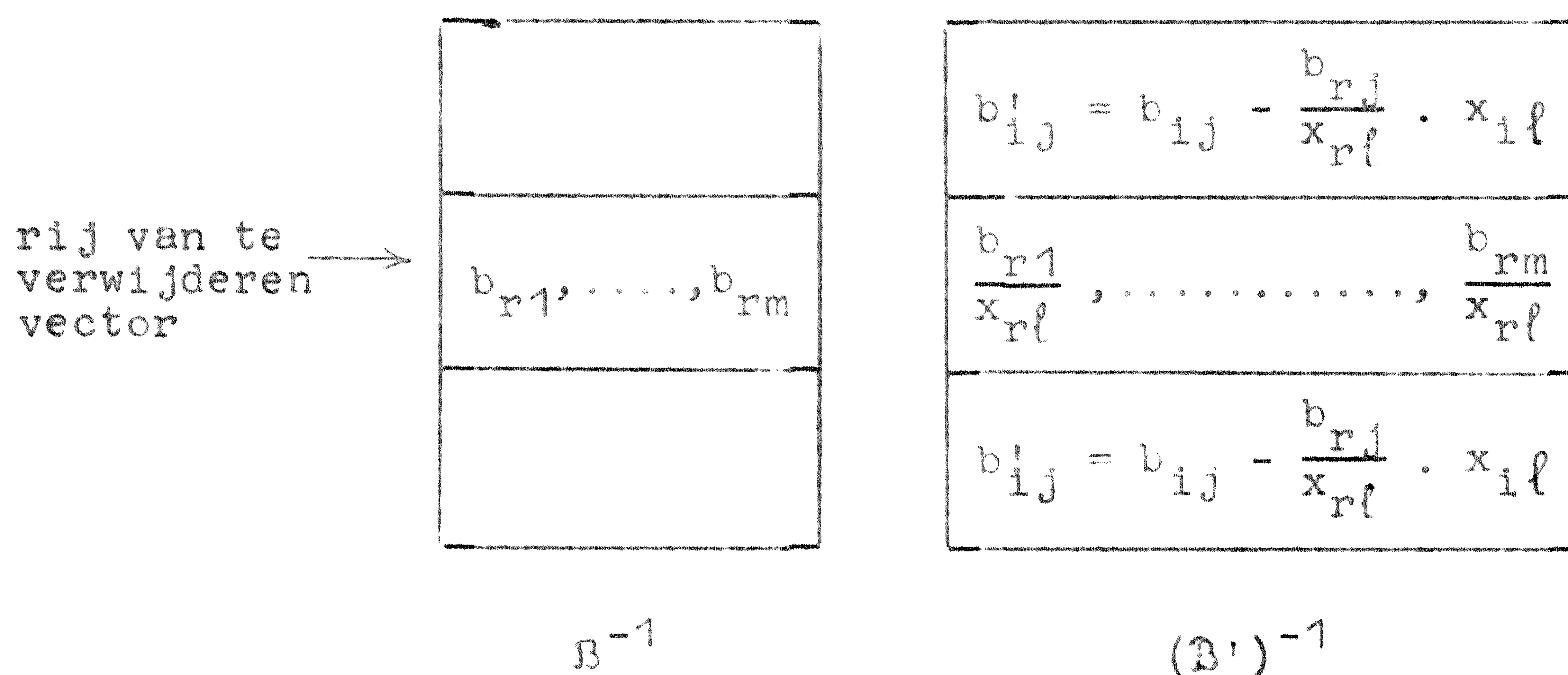


fig. 6.1

Schematische voorstelling van de transformaties (6.7) en (6.8)

Deze transformaties kunnen ook weergegeven worden in de vorm van een matrixvermenigvuldiging. Daartoe beschouwen wij de matrix

$$\xi^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -\frac{x_{1\ell}}{x_{r\ell}} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -\frac{x_{r\ell}}{x_{r\ell}} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & 1 & & \\ & & & \frac{1}{x_{r\ell}} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{x_{m\ell}}{x_{r\ell}} & & 1 \end{pmatrix}; \quad (6.9)$$

op de r^{de} kolom na is dit de eenheidsmatrix. Vermenigvuldigen wij B^{-1} met ξ^r , dan ontstaat precies de matrix $(B')^{-1}$; dus

$$\mathcal{E}^r \mathbb{B}^{-1} = (\mathbb{B}^r)^{-1}, \quad (6.10)$$

hetgeen door uitvermenigvuldigen eenvoudig te verifiëren is. De transformatie voor $\mathbb{B}^{-1}$ komt dus neer op een vermenigvuldiging met een eenvoudige matrix, die vastgelegd wordt door de elementen van een bepaalde kolom en het nummer van die kolom.

De matrices $\mathcal{E}^r$ voor de verschillende stappen geven wij aan met respectievelijk $\mathcal{E}_1^r, \mathcal{E}_2^r, \dots$ en de matrices $\mathbb{B}^{-1}$ met respectievelijk $(\mathbb{B}^{-1})_0, (\mathbb{B}^{-1})_1, \dots, 1^r$. Uit (6.10) volgt dan

$$\mathcal{E}_k^r (\mathbb{B}^{-1})_{k-1} = (\mathbb{B}^{-1})_k. \quad (6.11)$$

Bovendien is

$$(\mathbb{B}^{-1})_0 = \mathbb{I} \quad (6.12)$$

en dus geldt

$$(\mathbb{B}^{-1})_k = \mathcal{E}_k^r \cdot \mathcal{E}_{k-1}^r \cdot \dots \cdot \mathcal{E}_1^r \mathbb{I} \quad (6.13)$$

Om $\mathbb{B}^{-1}$ in iedere stap te kunnen vinden, behoeven dus slechts de matrices $\mathcal{E}^r$ onthouden te worden. Hieruit vindt men bijvoorbeeld in de k^{de} stap de vector X_k als volgt:

$$X_k = (\mathbb{B}^{-1})_k \cdot A_k = \mathcal{E}_k^r \mathcal{E}_{k-1}^r \cdot \dots \cdot \mathcal{E}_1^r A_k = \mathcal{E}_k^r [\dots \{ \mathcal{E}_2^r (\mathcal{E}_1^r A_k) \}] \quad (6.14)$$

De produkten tussen haken, accoladen, enzovoorts zijn produkten van een matrix met een vector, die echter steeds zo eenvoudig zijn, dat zij vrijwel neerkomen op produkten van twee vectoren. Op analoge wijze kan de vector $C_0 \mathbb{B}^{-1}$ eenvoudig gevonden worden.

Voor het gegeven voorbeeld zijn de matrices $\mathcal{E}^r$ achtereenvolgens:

$$\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Strict genomen moesten wij schrijven $\mathcal{E}_1^{r1}, \mathcal{E}_2^{r2}, \dots$, aangezien ook r niet steeds dezelfde waarde bezit; daar verwarring niet mogelijk is, wordt meestal de aangegeven eenvoudigere notatie gebruikt.

en $\mathcal{E}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Vermenigvuldigen wij bijvoorbeeld de matrix

B^{-1} uit tabel II met $\mathcal{E}_2$, dan vinden wij

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

welke matrix inderdaad de matrix B^{-1} uit tabel III voorstelt.

Wanneer men een groot aantal iteraties heeft uitgevoerd, dan is ook het aantal matrices $\mathcal{E}^r$ dat onthouden moet worden, groot. Het is echter bekend uit welke vectoren de basis op dat ogenblik bestaat; stel dat dit de vectoren $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ zijn. Men kan nu om geheugencapaciteit te besparen en bovendien^m om de nauwkeurigheid van de verkregen getallen te vergroten, de inverse van de gevonden basis rechtstreeks berekenen door op $(B^{-1})_0 = I$ alleen die transformaties toe te passen, welke nodig zijn om $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ in de basis op te nemen. Hiervoor zijn hoogstens m stappen¹ nodig, zodat men ook hoogstens m matrices $\mathcal{E}^r$ moet onthouden; door het kleinere aantal stappen zal de betrouwbaarheid van de cijfers toenemen. Dit opnieuw berekenen van de gevonden B^{-1} noemt men herinversie (re-inversion). De herziene simplexmethode in deze vorm staat bekend onder de naam "revised method with product form of inverse".

Beschrijvingen van de beide vormen van de herziene simplexmethode kan men onder andere vinden in het reeds genoemde artikel van WAGNER en in het boek van GASS¹⁾. Geen van beide beschrijvingen zijn echter volledig, terwijl men voorzichtig dient te zijn met de geformuleerde conclusies, daar die gebaseerd zijn op ervaringen, hoofdzakelijk opgedaan met de I.B.M. 650 en de I.B.M. 704 en welke niet noodzakelijk voor andere machines gelden.

Het boek van GASS en het boek van METZGER²⁾ geven overzichten van bestaande programma's voor verschillende rekenmachines, waarbij de laatstgenoemde auteur zich beperkt tot I.B.M.-machines.

1) S.I. GASS, Linear Programming, Methods and Applications, McGraw Hill (1958).

2) R.W. METZGER, Elementary Mathematical Programming, John Wiley and Sons (1950).

7. Dynamische problemen.

De in de paragrafen 1 en 4 genoemde voorbeelden van lineaire programmering zijn alle statische problemen: zij hebben betrekking op één periode. Daarnaast bestaat er een groep problemen, die betrekking hebben op het optimaliseren over een aantal perioden en welke eveneens in de vorm van lineaire programmeringsproblemen gegoten kunnen worden. De meest bekende voorbeelden hiervan liggen op het terrein van de produktieplanning.

Wij illustreren één en ander aan de hand van "produktieplanning" op het gebied van personeelsvoorzieningen. Daartoe nemen wij aan dat wij belast zijn met de personeelsvoorziening van een bedrijf in de komende vier jaren, waarin respectievelijk 12, 20, 42 en 60 personen voor een bepaalde functie nodig zijn. De opleiding duurt een jaar en er kan nog juist een groep voor het eerste jaar opgeleid worden. De opleidingscapaciteit bedraagt 24 personen per jaar. Het is toegestaan meer mensen op te leiden dan er in het eerstkomende jaar nodig zijn; deze mensen worden op een reservelijst geplaatst en krijgen per jaar een bedrag uitgekeerd, dat tweemaal zo hoog is als de opleidingskosten. Een vacature die niet vervuld kan worden veroorzaakt ieder jaar een verlies dat viermaal zo groot geschat wordt als de opleidingskosten. Verder is in het verleden gebleken dat er een zeker personeelsverloop is, waardoor een jaar na de opleiding nog slechts $\frac{2}{3}$ deel van de opgeleiden beschikbaar is en twee jaar na de opleiding niet meer dan de helft; onder diegenen die dan nog in dienst zijn vindt in het algemeen geen verloop meer plaats. De vraag is nu hoeveel personen er ieder jaar opgeleid moeten worden.

Het aantal op te leiden personen vóór het eerste jaar geven wij aan met x_0 , het aantal in het eerste, het tweede en het derde jaar met respectievelijk x_1 , x_2 en x_3 . Het (eventuele) tekort voor de verschillende jaren wordt voorgesteld door t_1 , t_2 , t_3 en t_4 ; het (eventuele) overschot door resp. r_1 , r_2 , r_3 en r_4 . De gevraagde aantallen personen zijn n_1 , n_2 , n_3 en n_4 en de aantallen open blijvende plaatsen van de totale opleidingscapaciteit N zijn in de periode vóór het eerste jaar u_0 en in de volgende jaren u_1 , u_2 en u_3 . De fractie die na één jaar blijft zij f en die na twee jaar nog aanwezig is zij g . Tussen deze grootheden bestaan de volgende betrekkingen:

$$\begin{array}{rclcl}
 x_0 & & -r_1 & +t_1 & = n_1 \\
 fx_0 + x_1 & & -r_2 & +t_2 & = n_2 \\
 gx_0 + fx_1 + x_2 & & -r_3 & +t_3 & = n_3 \\
 gx_0 + gx_1 + fx_2 + x_3 & & -r_4 & +t_4 & = n_4 \\
 x_0 & & & & = N \\
 x_1 & & & & = N \\
 x_2 & & & & = N \\
 x_3 & & & & = N
 \end{array} \quad (7.1)$$

De te minimaliseren onkosten bedragen

$$y_0 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + a(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + b(t_1 + t_2 + t_3 + t_4), \quad (7.2)$$

waarin a en b de verhoudingen aangeven tussen het bedrag aan mensen op de reservelijst per jaar uitgekeerd, respectievelijk de onkosten per jaar per vacature en de opleidingskosten per persoon.

Vullen wij de gegeven waarden van de constanten in (7.1) en (7.2) in, dan gaan deze over in

$$\begin{array}{rclcl}
 x_0 & & -r_1 & +t_1 & = 12 \\
 \frac{2}{3}x_0 + x_1 & & -r_2 & +t_2 & = 20 \\
 \frac{1}{2}x_0 + \frac{2}{3}x_1 + x_2 & & -r_3 & +t_3 & = 42 \\
 \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3 & & -r_4 & +t_4 & = 60 \\
 x_0 & & & +u_0 & = 24 \\
 x_1 & & & +u_1 & = 24 \\
 x_2 & & & +u_2 & = 24 \\
 x_3 & & & +u_3 & = 24
 \end{array} \quad (7.3)$$

en in

$$y_0 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + 2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + 4(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \quad (7.4)$$

In dit probleem is reeds een volledig stelsel eenheidsvectoren aanwezig, zodat een eerste toegelaten oplossing direct opgeschreven kan worden. Met behulp van de herziene simplexmethode kan de optimale oplossing in vijf stappen gevonden worden. Deze luidt:

$$x_0=12, x_1=18, x_2=24, x_3=24, r_2=6, t_4=5, u_0=12, u_1=6,$$

terwijl de overige variabelen nul zijn en y_0 gelijk is aan 110.

Ook aan deze probleemstelling kan in velerlei opzicht een meer algemene vorm gegeven worden. Zo kan men in het geval, waarin alle aanmeldingen geaccepteerd dienen te worden en deze bij eventuele tekorten via propaganda verhoogd kunnen worden, verdere grenzen opleggen aan de aantallen op te leiden personen x_1 . Verder kan men rekening houden met een opleiding van meer dan een jaar, afval tijdens de opleiding, verschillende aantallen jaren om de studie te voltooien, enzovoorts. Een andere generalisatie betreft het geval, waarin een deel van de nu opgeleide personen, later zelf kan gaan opleiden, waardoor de opleidingscapaciteit vergroot kan worden en men dus voor de opgeleide personen moet kiezen tussen direct inschakelen in het produktieproces of verder opleiden tot opleiders.